E.N.S.I. DE CHIMIE CENTRE (P' & TB) 1979

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

N.B. — *Les questions 3° et 4° sont indépendantes des questions qui les précèdent.*

Étant donnée une fonction f, dont on connaît un développement limité jusqu'à un certain ordre, le problème a pour but de montrer, sur un exemple, comment il est possible d'approcher cette fonction f par une fraction rationnelle.

Dans toute la suite du problème on appellera approximant $[m, n]$ une fraction rationnelle $R_{mn} = \dfrac{P_m}{Q_n}$ où P_m et Q_n désignent des polynômes dont les degrés sont tels que :

$$\deg P_m \leqslant m \quad \text{et} \quad \deg Q_n \leqslant n.$$

f étant une fonction dont on connaît le développement en série entière au voisinage de 0, si on pose :

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^l$$

on définit l'approximant $[m, n]$ par la relation :

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l x^l - R_{mn}(x) = O(x^{m+n+1})$$

ou encore, lorsque $Q_n(0) \neq 0$:

$$Q_n(x) \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^l - P_m(x) = O(x^{m+n+1})$$

où on rappelle que le symbole $O(x^p)$ signifie que :

$$\lim_{x \to 0} x^{-p} O(x^p) = K$$

où K est une constante finie non nulle.

1° On pose :

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} p_k x^k \; ; \qquad Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n} q_j x^j$$

Les coefficients $p_0, p_1, \ldots, p_m, q_0, q_1, \ldots, q_n$ n'étant définis qu'à un facteur multiplicatif près on peut choisir l'un d'eux arbitrairement égal à 1 à condition qu'il ne soit pas nul. En posant $q_0 = 1$, écrire le système d'équations admettant pour solution les coefficients p_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ et q_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ qui déterminent l'approximant $[m, m]$.

Application. — Déterminer les approximants [1, 1], [2, 2] et [3, 3] de la fonction $f : x \longmapsto e^x$ et comparer les valeurs en $x = 1$ de ces trois approximants à $f(1) = e$.

2° Montrer que si l'approximant $[m, n]$ d'une fonction f existe, il est unique.

3° On considère l'équation différentielle linéaire :

$$xy'' - (2m + x)y' + my = 0$$

où m est un entier positif. Montrer qu'elle admet pour solutions les deux fonctions :

$$y_1 : x \longmapsto P_m(x)$$
$$y_2 : x \longmapsto e^x P_m(-x)$$

où P_m est un polynôme de degré m qu'on déterminera en imposant la condition $P_m(0) = 1$.

4° Montrer que l'équation différentielle de la question précédente admet en particulier une solution de la forme $y(x) = x^{2m+1} v(x)$ où v est une fonction développable en série entière de la forme :

$$v(x) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l.$$

On donnera l'expression générale du coefficient b_l en imposant la condition $b_0 = 1$ et on précisera la valeur du rayon de convergence de cette série.

.../...

5° En déduire que l'approximant $[m, m]$ de la fonction $f : x \longmapsto e^x$ a pour expression $\dfrac{P_m(x)}{P_m(-x)}$ où P_m est le polynôme de degré m déterminé à la question 3°.

6° Montrer que :

$$\lim_{m \to \infty} \frac{P_m(x)}{P_m(-x)} = e^x.$$

7° Soit F une fonction strictement positive dont on connaît un développement limité au voisinage de l'origine. De plus, pour $x = a$ $(a > 0)$, la fonction F présente une singularité telle que :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} (a-x)^\alpha \, F(x) = A$$

où α est un nombre positif et A une constante réelle non nulle. Après avoir montré qu'on a aussi :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} (a-x) \left(\operatorname{Ln} F(x) \right)' = \alpha,$$

imaginer comment on pourrait déterminer les nombres a et α par approximations successives en utilisant les idées développées dans les questions précédentes.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail